ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen final **20/05/2025**

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Apellido y nombre:

Corrigió: **Revisó:**

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Calificación

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta. No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas

Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1. *a*) Enuncie el criterio del hessiano para clasificar los puntos críticos de una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$.

b) Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que el gráfico de $f(x,y) = (1+y^2)(x^3-2ax^2+10)$ tenga plano tangente horizontal en el punto $(2,0,f(2,0))$ y con el valor de a hallado, determine si $f(2,0)$ es un extremo local y clasifíquelo.

T2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. **Justifique su respuesta.**

a) El punto $(3,0,0)$ es un punto **regular y simple** de la curva de ecuación $C: (x,y,z) = (2t+1,\ t^2-t,\ t^2-1)$, $-4 < t < 4$.

b) Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^1$, es una función positiva (es decir, $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$), entonces la circulación de $\vec{f}(x,y,z) = (yg(x),\ y^2,\ z^2)$ a lo largo de la curva borde de la superficie S definida por $S: x+y+z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, es positiva si la curva está orientada en sentido $(4,0,0) \to (0,0,4) \to (0,4,0) \to (4,0,0)$.

P1. Halle una ecuación de la recta normal a la superficie de nivel 2 de función h en $\mathbf{x}_0 = (1,3,4)$, sabiendo que en un entorno de dicho punto $h = f \circ \vec{g}$, donde $w = f(u,v)$ está definida implícitamente por la ecuación $2v + ue^{w-2} - w = -1$ en un entorno de $(-1,1,w_0)$ y $\vec{g}\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una función C^1 tal que $\vec{g}(1,3,4) = (-1,1)$ y $D\vec{g}(1,3,4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

P2. Calcule el área del conjunto $D = \left\{(x,y)\ :\ x^2+2y^2 \leq 4,\ 0 \leq \sqrt{2}y \leq x \right\}$.

P3. Calcule el flujo de $\vec{f}(x,y,z) = \big(xg(xz),\ y^2,\ 1-zg(xz)\big)$, $g \in C^1$, a través de la superficie $\sum$ definida por $\sum: y = x^2+z^2$, $y \leq 4$. Indique claramente la orientación de la superficie elegida para el cálculo.

P4. Halle la solución de $y'' + y' - 2y = 9e^x$ que verifica $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

AM 2	Final	HOJA N° 1/3 FECHA 20-3-25

T1 a) Enunciar el criterio del hessiano para clasificar los puntos críticos de una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \to |H(x,y)| = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy}{}^2$$

Si $|H(P.C)| > 0 \Rightarrow$ Hay extremos

si $f''_{xx} > 0$ hay mínimo

si $f''_{xx} < 0$ hay máximo

Si $|H(P.C)| < 0$ No hay extremo

b) Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que el gráfico de $f(x,y) = (1+y^2)(x^3 - 2ax^2 + 10)$ tenga plano tangente horizontal en el punto $(2, 0, f(2,0))$ y con el valor de a hallado, determinar si $f(2,0)$ es un extremo local y clasificarlo

$\nabla f(2,0) = (0,0)$ $\qquad f(2,0) = 8 - 8a + 10 \to \boxed{f(2,0) = 18 - 8a}$

$$\begin{cases} f'_x = (1+y^2)(3x^2 - 4ax) \to f'_x(2,0) = (1+0)(3 \times 2^2 - 4a \times 2) = \underbrace{12 - 8a = 0} \\ f'_y = 2y(x^3 - 2ax^2 + 10) \to f'_y(2,0) = 0 \end{cases}$$

$12 = 8a$

$\frac{12}{8} = a = \frac{3}{2}$

$\boxed{a = 3/2}$

Criterio del hessiano

$f''_{xx} = (1+y^2)(6x - 4a) = (1+y^2)(6x - 4 \times \frac{3}{2}) = (1+y^2)(6x - 6)$

$f''_{xy} = 2y(3x^2 - 4ax) = 2y(3x^2 - 6x)$

$f''_{yy} = 2(x^3 - 2ax^2 + 10) = 2(x^3 - 3x^2 + 10)$

$$H(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 - 12 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to |H(2,0)| = 36 > 0$$

hay extremo

$f(2,0) = 18 - 8 \times \frac{3}{2} = 6$

$f''_{xx} = 6 > 0 \to$ es mínimo

$\boxed{f \text{ alcanza mínimo local en } (2,0) \text{ y toma valor } 6}$

NOTA

T2 Determinar V o F. Justificar:

a) El punto $(3,0,0)$ es un punto regular y simple de la curva de ecuación $C: (x,y,z) = (2t+1, t^2-t, t^2-1) \quad -4 \leq t \leq 4$

$$\bar{\gamma}(t) = (2t+1, t^2-t, t^2-1)$$

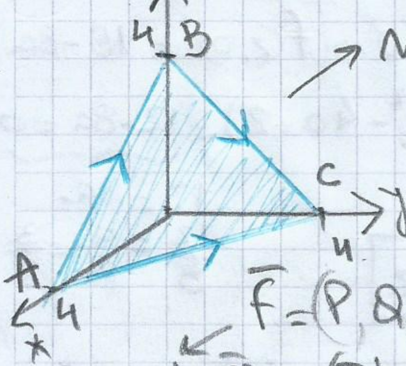
$$\bar{\gamma}'(t) = (\underset{\uparrow \neq 0}{2}, 2t-t, 2t) \neq (0,0,0) \ \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{\gamma}(t) \text{ es regular}$$

$$(3,0,0) = (2t_0+1, t_0^2-t_0, t_0^2-1) \rightarrow t_0 = 1 \rightarrow \underbrace{1 \text{ punto}}$$

$(3,0,0)$ es punto simple

V

b) Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^1$ es una función positiva ($g(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) entonces la circ. de $\bar{F}(x,y,z) = (y\, g(x), y^2, z^2)$ a lo largo de la curva borde de $S: x+y+z=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ es positiva si la curva está orientada en sentido $\underset{A}{(4,0,0)} \rightarrow \underset{B}{(0,0,4)} \rightarrow \underset{C}{(0,4,0)} \rightarrow \underset{A}{(4,0,0)}$



$N_S = (-1,-1,-1)$ por la orientación de la curva

C: curva suave a trozos
S: sup suave orientable
$\} \ C = \partial S$

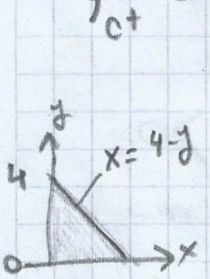
$\bar{F} \in C^1 \Rightarrow$ T. Stokes: $\oint_C \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, d\bar{S}$

$\bar{F} = (P, Q, R)$

$$\text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, R'_x - P'_z, Q'_x - P'_y) = (0-0, 0-0, 0-g(x))$$

$$\text{rot}(\bar{F}) = (0, 0, -g(x))$$

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, \check{n}\, dS = \iint_{S_{xy}} \text{rot}(\bar{F}) \cdot n\, dx\, dy =$$



$0 \leq y \leq 4$
$0 \leq x \leq 4-y$

$$= \iint_{S_{xy}} (0,0,-g(x))(-1,-1,-1)\, dx\, dy = \iint_{S_{xy}} \overbrace{g(x)}^{>0 \ \forall x}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^4 \underbrace{\int_0^{4-y} g(x)\, dx}_{>0}\, dy = \overset{>0}{C} \int_0^4 dy = 4 \cdot \overset{>0}{C} > 0$$

V

AM 2 | Final | HOJA Nº 2/3 | FECHA 20-8-25

(P1) Hallar una ec. de la recta normal a la sup. de nivel 2 de función h en $x_0=(1,3,4)$ sabiendo que en un entorno de dicho punto $h = F\circ\bar{g}$, donde $w = f(u,v)$ está definida implícitamente por la ec. $2v + u e^{w-2} - w = -1$ en un entorno de $(-1,1,w_0)$ y $\bar{g}: U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ es una función C^1 tal que $\bar{g}(1,3,4)=(-1,1)$ y $D\bar{g}(1,3,4)=\begin{pmatrix}2&2&4\\-1&2&0\end{pmatrix}$

$x_0=(1,3,4)\in C_2 \rightarrow \boxed{h(1,3,4)=2}$

$\underbrace{h(1,3,4) = f(\bar{g}(1,3,4)) = f(-1,1)}$

$Dh(1,3,4) = Df(\bar{g}(1,3,4))\cdot D\bar{g}(1,3,4) =$

$= Df(-1,1)\cdot\begin{pmatrix}2&2&4\\-1&2&0\end{pmatrix} = \left[h'_x(1,3,4)\quad h'_y(1,3,4)\quad h'_z(1,3,4)\right] =$ ✱

x TFI: $N_{Sup\,N.2}\ //\ \nabla h$

$w=f(u,v)$ Necesito $f'_u(-1,1)$ y $f'_v(-1,1)$

$\hookrightarrow F(u,v,w) = 2v + u e^{w-2} - w + 1 \longrightarrow f'_u(-1,1) = -\dfrac{F'_u(-1,1,w)}{F'_w(-1,1,w)}$

$f'_v(-1,1) = -\dfrac{F'_v(-1,1,w)}{F'_w(-1,1,w)}$

Hallo $w_0 \rightarrow F(-1,1,w_0)=0$

$2\times 1 + (-1)e^{w_0-2} - w_0 + 1 = 0$

$\boxed{w_0 = 2}$ ✓

$F'_u = e^{w-2} \rightarrow F'_u(-1,1,2) = 1$

$F'_v = 2 \longrightarrow F'_v(-1,1,2) = 2$

$F'_w = u e^{w-2} - 1 \rightarrow F'_w(-1,1,2) = -2$

$f'_u(-1,1) = -\dfrac{1}{-2} = \boxed{1/2 = f'_u(-1,1)}$

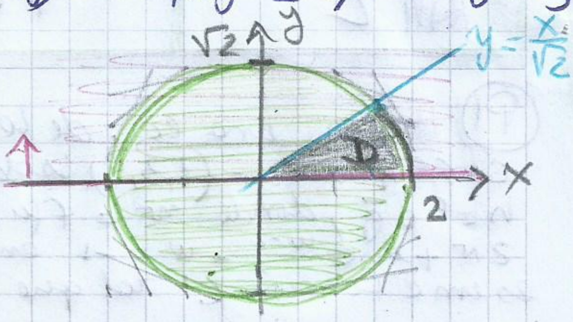
$f'_v(-1,1) = -\dfrac{2}{-2} = \boxed{1 = f'_v(-1,1)}$

$(h'_x\ \ h'_y\ \ h'_z) = \left[\tfrac{1}{2}\ \ 1\right]\begin{bmatrix}2&2&4\\-1&2&0\end{bmatrix} = \left[0\ \ 3\ \ 2\right] \rightarrow N_{Sup\,N2} = (0,3,2)$

$$\boxed{\mathbb{L}: \bar{\beta}(t) = t(0,3,2) + (1,3,4)}\quad t\in\mathbb{R}$$

NOTA

P2 Calcular el área del conjunto $D=\{(x,y) \in: x^2+2y^2\leq 4,\ 0\leq \sqrt{2}y\leq x\}$



$x^2+2y^2\leq 4 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\leq 1}$

$a=2$ $\quad b=\sqrt{2}$

$0\leq \sqrt{2}\,y\leq x \rightarrow 0\leq \sqrt{2}\,y \rightarrow \boxed{y\geq 0}$

$\sqrt{2}\,y\leq x$

$\boxed{y\leq \frac{x}{\sqrt{2}}}$

$\begin{cases} x=2r\cos(t)\\ y=\sqrt{2}\,r\,\mathrm{sen}(t)\end{cases}$

$y=0\rightarrow t=0 \qquad 0\leq r\leq 1$

$y=\frac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}\cancel{r}\,\mathrm{sen}(t)=\frac{2\cancel{r}\cos(t)}{\sqrt{2}}$

$2\,\mathrm{sen}(t)=2\cos(t)$

$\frac{\mathrm{sen}(t)}{\cos(t)}=1\rightarrow \boxed{t=\frac{\pi}{4}}$

$\mathrm{Jac}=abr=2\sqrt{2}\,r$

$A_D=\iint_D dx\,dy =$

$\overset{C.V.}{=}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 2\sqrt{2}\,r\,dr\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} r^2\Big|_0^1 dt=$

$=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi=A_D}$

P3 Calcular el flujo de $\bar{f}(x,y,z)=(x\,g(xz),\ y^2,\ 1-z\,g(xz))$ $g\in C^1$, a través de la sup Σ definida por $\Sigma: y=x^2+z^2,\ y\leq 4$. Indicar orientación

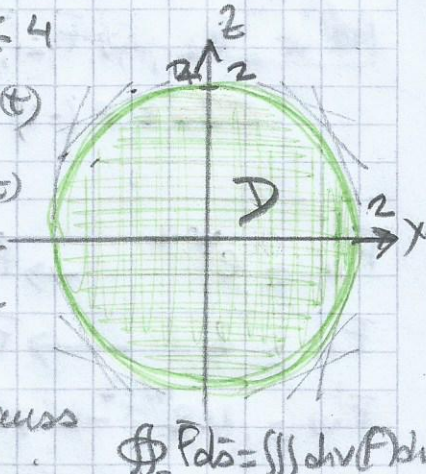
Intenté hacerlo por definición pero no pude (quedó $g(xz)$)

$x^2+z^2\leq 4$

$\begin{cases} x=r\cos(t)\\ y=r^2\\ z=r\,\mathrm{sen}(t)\end{cases}$

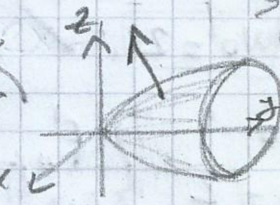
$0\leq t\leq 2\pi$

$0\leq r\leq 2$



$\rightarrow T: x^2+z^2=4$ en $y=4$

$S=\Sigma\cup T$



$\underbrace{\oiint_S \bar{f}\,d\bar{\sigma}}_{\mathrm{I}}=\iint_\Sigma \bar{f}\,d\bar{\sigma}+\underbrace{\iint_T \bar{f}\,d\bar{\sigma}}_{\mathrm{II}}$

S sup cerrada, orientada al exterior.
$f\in C^1$
W región encerrada por S

} T. Gauss $\quad \oiint_S \bar{f}\,d\bar{\sigma}=\iiint_W \mathrm{div}(\bar{f})\,dvol$

$\mathrm{div}(\bar{f})=P'_x+Q'_y+R'_z=\cancel{g(xz)}+xz\,\cancel{g(xz)}+2y-\cancel{g(xz)}-zx\,\cancel{g(xy)}=2y$

$\boxed{\mathrm{div}=2y}$

(I) $\oiint_S \bar{f}\,d\bar{\sigma}=\iiint_W 2y\,dvol\overset{C.V.}{=}2\int_0^{2\pi}dt\int_0^2\int_{r^2}^4 \overset{\mathrm{Jac}}{r}\cdot\underbrace{r^2}_{y}\,dz\,dr=4\pi\int_0^2 r^3(4-r^2)\,dr=$

$=4\pi\frac{16}{3}=\boxed{\frac{64}{3}\pi=\oiint_S \bar{f}\,d\bar{\sigma}}$ (I)

$y=4\rightarrow N=(0,1,0)$

(II) $\iint_T \bar{f}\,d\bar{\sigma}=\iint_{T_{xz}}(x\,g(xz),4^2,1-z\,g(xy))\,(0,1,0)\,dx\,dz=$

$=\iint_{T_{xz}}16\,dx\,dz=16\underbrace{\iint_{T_{xy}}dx\,dz}_{\text{Área } D=\pi\cdot 2^2}=\boxed{64\pi=\iint_T \bar{f}\,d\bar{\sigma}}$ (II) $\Rightarrow \boxed{\iint_\Sigma \bar{f}\,d\bar{\sigma}=-\frac{128}{3}\pi}$

I − II

NOTA

(P4) Hallar la solución de $y''+y'-2y=9e^x$ que verifica $y(0)=0$, $y'(0)=3$

SH) $y''+y'-2y=0$

$r^2+r-2=0 \to r_1=1,\ r_2=-2$

$$\boxed{y_H=Ae^x+Be^{-2x}}$$

$A,B\in\mathbb{R}$

SP) $y_P=Cxe^x$ (no usé Ce^x porque ya está en y_H)

$y'_P=Ce^x+Cxe^x$

$y''_P=Ce^x+Ce^x+Cxe^x=2Ce^x+Cxe^x$

$$\underbrace{y''}+\underbrace{y'}-2y=9e^x$$

$$2Ce^x+Cxe^x+Ce^x+Cxe^x-2Cxe^x=9e^x$$

$$\cancel{e^x}(2C+\cancel{Cx}+C+\cancel{Cx}-\cancel{2Cx})=9\cancel{e^x}$$

$$3C=9\to C=3 \to \boxed{y_P=3xe^x}$$

$$\boxed{y_G=Ae^x+Be^{-2x}+3xe^x}$$

$$y'_G=Ae^x-2Be^{-2x}+3e^x+3xe^x$$

$y(0)=0=Ae^0+Be^0+0 \longrightarrow \boxed{A+B=0}$

$y'(0)=3=Ae^0-2Be^0+3e^0+0 \to A-2B+\cancel{3}=\cancel{3} \to \boxed{A-2B=0}$

$$\boxed{A=B=0}$$

$$\boxed{y(x)=3xe^x}$$

NOTA