UTN.BA

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 25/04/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas.
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1) a) **Defina** máximo absoluto de un campo escalar $f: \boldsymbol{D} \subseteq R^2 \to R \,/\, z = f(x,y)$ en el conjunto $\boldsymbol{D}$.

b) Indique si la siguiente proposición es verdadera o falsa demostrándola o bien exhibiendo un contraejemplo según corresponda:

- El campo escalar $\boldsymbol{T(x,y) = x^2\, y + 4\, x\, y + y^2}$ presenta dos máximos relativos distintos. -

T2- a) **Enuncie** el Teorema de Gauss con las hipótesis correspondientes

b) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (2\,x\,y\,,\, z - y^2\,,\, 3\,z)$ **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie simple, cerrada y suave a trozos S, sabiendo que el volumen encerrado por S vale 5.

P1- **Calcule** la longitud de la curva C definida por: $y = x \;\wedge\; 2\,x^2 + z^2 = 2$.

P2 - Dada la superficie S de ecuación: $\mathbf{4\,e^{xz} - y\,z = 0}$ **analice** si la recta normal a S en el punto $(0\,,\,2\,,\,z_0)$ corta al plano $z = x + 3\,y$. En caso afirmativo **halle** el punto de corte.

P3 - Exprese mediante una integral múltiple conveniente, el volumen del cuerpo definido por:
$x^2 + y^2 \le z \le 4$ con $x^2 + y^2 \le 1$.

P4 - Determine la solución $y'' + 2y' + y = 3\,e^{2x}$ sabiendo que la recta tangente en el punto $(0, x_0)$ tiene ecuación $y = \frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3}$

Resuelto por Sylvina

AM II | Final | HOJA N°: 1/2 | FECHA: 25-4-25

1) a) Definir máximo absoluto de un campo escalar $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $z = f(x,y)$ en el conjunto D

$A \in D$, $f(A)$ es maximo absoluto si $\forall (x,y) \in D$:

$$f(A) \geq f(x,y)$$

b) Indicar V o F:

El campo escalar $T(x,y) = x^2 y + 4xy + y^2$ presenta dos máximos relativos distintos

T es diferenciable $\Rightarrow$ hallo (x,y) / $\bar{\nabla} T(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} T'_x = 0 = 2xy + 4y = 2y(x+2) \to y = 0 \ ①, \ x = -2 \ ② \\ T'_y = 0 = x^2 + 4x + 2y \end{cases}$$

① $y = 0 \to x^2 + 4x + 0 = 0 = x(x+4) \to x = 0,\ x = -4$

$\boxed{PC_1 = (0,0)}$ $\boxed{PC_2 = (-4,0)}$

$-4 + 2y = 0$

② $x = -2 \to (-2)^2 + 4(-2) + 2y = 0 = 4 - 8 + 2y \to y = +2$

$\boxed{PC_3 = (-2,+2)}$

Criterio del hessiano

$$\begin{cases} T''_{xx} = 2y \\ T''_{xy} = 2x+4 \\ T''_{yy} = 2 \end{cases} \Rightarrow H(T(x,y)) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+4 \\ 2x+4 & 2 \end{pmatrix} \to \boxed{|H(T(x,y))| = 4y - (2x+4)^2}$$

$|H(T(0,0))| = -16 < 0 \to$ No hay extremo

$|H(T(-4,0))| = -16 < 0 \to$ No hay extremo

$|H(T(-2,+2))| = 8 - 4 = 4 > 0 \to$ hay extremo $\quad T''_{xx}(-2,2) = 4 > 0$ es mínimo

F $\boxed{\text{T presenta 1 extremo y es mínimo}}$

NOTA

Resuelto por Sylvina

T2 a) Enunciar el teorema de Gauss con las hip. correspondientes

Sean: • W una región de $\mathbb{R}^3$

S una sup. orientable, frontera de W, simple y suave

$\bar{F} \in C^1$

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \bar{F}\,d\bar{S} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\,d\,vol$$

b) Dado $\bar{F}_{(x,y,z)} = (2xy,\ z-y^2,\ 3z)$ calcular el flujo de F a través de la sup. simple, cerrada y suave sabiendo que el vol. encerrado por S vale 5

$\bar{F} = (P, Q, R)$, P, Q, R son polinomios $\Rightarrow F \in C^1$ ✓

S sup. cerrada, simple y suave

$\Rightarrow$ Se cumplen las hip T. Gauss $\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \bar{F}d\bar{S} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\,d\,vol$

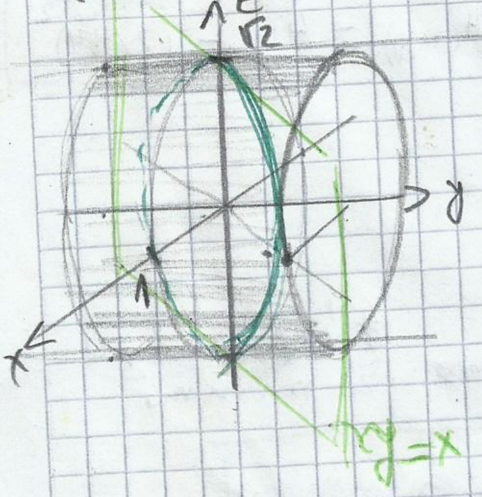
$$\operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 2y - 2y\ 3 = \boxed{3 = \operatorname{div}(\bar{F})}$$

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \bar{F}d\bar{S} = \iiint_W 3\,d\,vol = 3\underbrace{\iiint_W d\,vol}_{x\ encierr. = 5} = 3 \times 5 = 15 \qquad \boxed{\oint\!\!\oint_S \bar{F}d\bar{S} = 15}$$

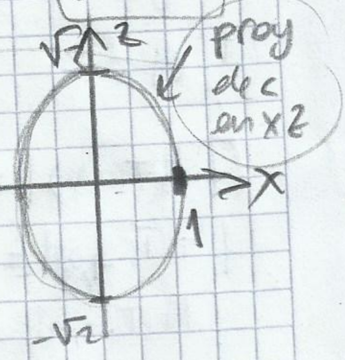
P1 Calcular la longitud de la curva C definida por $y = x$, $2x^2 + z^2 = 2$

$$C: \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + z^2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \frac{2x^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 1 \longrightarrow x^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

$\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = \sqrt{2}}$



$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = x = \cos(t) \\ z = \sqrt{2}\,\operatorname{sen}(t) \end{cases}$$



$$\bar{\beta}(t) = (\cos(t), \cos(t), \sqrt{2}\operatorname{sen}(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\bar{\beta}'(t) = (-\operatorname{sen}(t), -\operatorname{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t))$$

$$\|\bar{\beta}'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (-\operatorname{sen}(t))^2 + (\sqrt{2}\cos(t))^2} =$$

$$= \sqrt{2\operatorname{sen}^2(t) + 2\cos^2 t} = \sqrt{2(\underbrace{\cos^2 + \operatorname{sen}^2}_{1})} = \sqrt{2}$$

$$long = \int_C dl = \int_0^{2\pi} \|\beta'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\pi\sqrt{2} = long \qquad \boxed{long = 2\sqrt{2}\,\pi}$$

NOTA

Resuelto por Sylvina

AM2 UTN	Final	HOJA N° 2/2
		FECHA 25-4-25

(P2) Dada la sup. S de ecuación $4e^{xz} - yz = 0$ analizar si la recta normal a S en el punto $(0, 2, z_0)$ corta al plano $\boxed{z = x + 3y}$ T
En caso afirmativo hallar el punto de corte

$S: 4e^{xz} - yz = 0 \rightarrow N_S = (4ze^{xz}, -z, 4xe^{xz} - y)$

Hallo z_0

$z_0 \rightarrow S: 4e^0 - 2z_0 = 0$

$x = 0$
$y = 2$

$4 - 2z_0 = 0 \rightarrow 4 = 2z_0 \rightarrow \boxed{z_0 = 2}$

$P = (0, 2, 2)$

$N_{S_P} = (4 \cdot 2e^0, -2, 4 \cdot 0 - 2)$

$\boxed{N_{S_P} = (8, -2, -2)} \rightarrow$ uso $N_{S_P} = (4, -1, -1)$

$\mathbb{L}$ es la recta Normal a S en P

$$\boxed{\mathbb{L}: \bar{\beta}_{(t)} = t(4, -1, -1) + (0, 2, 2)}$$

$$\boxed{\bar{\beta}_{(t)} = (\underbrace{4t}_{x}, \underbrace{2-t}_{y}, \underbrace{2-t}_{z})} \quad t \in \mathbb{R}$$

Hallo, si $\exists$, $\mathbb{L} \cap T$:

$T: z = x + 3y$

$2 - t = 4t + 3(2 - t)$

$2 - t = 4t + 6 - 3t$

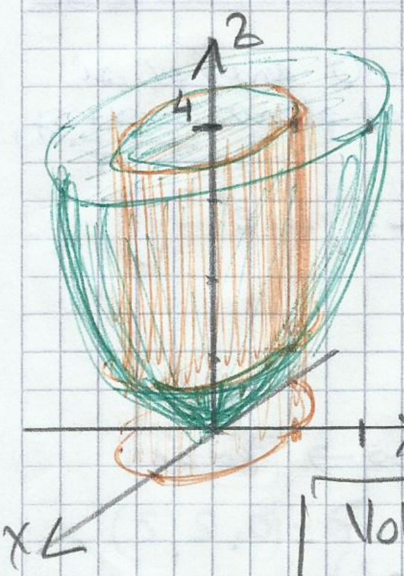
$-4 = 2t \rightarrow \boxed{t = -2}$

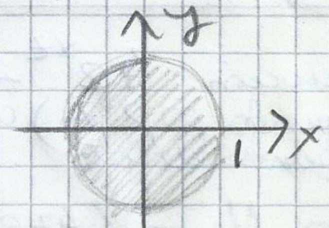
$$\boxed{\mathbb{L} \cap T: \bar{\beta}_{(-2)} = (-8, 4, 4)}$$

NOTA

Resuelto por Sylvina

P3) Expresar, mediante una integral múltiple con remonte, el vol. del cuerpo definido por $x^2+y^2 \le z \le 4$ con $x^2+y^2 \le 1$





$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

$0 \le t \le 2\pi$ $\qquad x^2+y^2 = r^2$

$0 \le r \le 1$

$r^2 \le z \le 4$

Jac

$$\boxed{Vol_W = \iiint_W dvol \overset{c.v.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^4 r \; dz\,dr\,dt}$$

P4) Determinar la solución $y''+2y'+y=3e^{2x}$ sabiendo que la recta tangente en el punto $(0, y_0)$ tiene ecuación $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

¿ y_0 ?

SH) $y''+2y'+y=0$ $\qquad A, B \in \mathbb{R}$

$r^2+2r+1=0 \rightarrow r_1 = r_2 = -1 \rightarrow \boxed{y_H = Ae^{-x}+Bxe^{-x}}$

SP) $y_p = ce^{2x} \rightarrow y_p' = 2ce^{2x} \rightarrow y_p'' = 4ce^{2x}$

$y''+2y'+y = 3e^{2x}$

$4c\cancel{e^{2x}} + 2\cdot 2c\cancel{e^{2x}} + c\cancel{e^{2x}} = 3\cancel{e^{2x}}$

$4c+4c+c = 3$

$9c = 3 \rightarrow c = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{y_p = \frac{e^{2x}}{3}}$

SG) $\boxed{y_G = y_H + y_p = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}}$

$\rightarrow y' = -Ae^{-x} + Be^{-x} - Bxe^{-x} + \frac{2e^{2x}}{3}$

$x=0$

$(0, y_0) \in$ recta tg $\rightarrow y_0 = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3} \rightarrow y_0 = \frac{1}{3}$

$y_G(0) = Ae^{-0} + B\cdot 0\, e^{-0} + \frac{e^{2\cdot 0}}{3} = A + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{A=0}$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow y' = \frac{2}{3} \rightarrow y'(0) = \frac{2}{3}$

$y_G'(0) = -Ae^0 + Be^0 - 0 + \frac{2e^0}{3} = -\underset{0}{A} + B + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{B=0}$

$$\boxed{y = \frac{e^{2x}}{3}}$$

NOTA

Resuelto por Sylvina