ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 25/02/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1**.** a. **Enuncie** el Teorema del Rotor (Stokes), con sus respectivas hipótesis.

b. Bajo las condiciones del teorema, **demuestre** que la circulación del campo $\bar{f}$ (x,y,z) = (2 z , g(x,y,z) , 2 x) sobre cualquier curva cerrada contenida en y = k , es nula, siendo g ∈ $\mathbf{C^1}$en $\boldsymbol{R^3}$.

T2- a . **Defina** máximo relativo de un campo escalar $f: D \subseteq R^2 \to R \;/\; z = f(x,y)$

b. **Analice** si *f(x,y)* = 9 - $\sqrt{4x^2 + 2\,y^4}$ alcanza en (0, 0) un extremo relativo, justifique.-

P1- **Calcule** el trabajo de $\bar{f}$ (x ,y) = (H (x) + 6 , x^2 + M (y)) siendo con H , M ∈ $\mathbf{C^1}$ en $\boldsymbol{R}$ a lo largo de la curva frontera de la región D definida por: $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ con x ≥ 1 indique gráficamente la orientación elegida para el cálculo.

P2 – Sea $\varphi(x)$ la trayectoria ortogonal a la familia de curvas K x = e^{-2y} en el punto (0,0) , **obtenga** la ecuación de la recta tangente y del plano normal en el punto (-1,0-1) de la curva:

$$\boldsymbol{C} \quad \begin{cases} y + z + x\,\varphi(x) = -2 \\ z - 4y = -1 \end{cases}$$

P3 **- Halle** una función g(x) para que el Gradiente del campo escalar F sea idénticamente igual a (0 , 1) para todo (x ,y) ∈ R^2 , si F (x, y) = g´(x) – g(x) + x^2 + y sabiendo que g'(0)= -2 ∧ g(0) = 0.

P4- Sea S la superficie frontera del cuerpo definido por $y \geq x^2 + z^2$ con $y \leq 4$, **calcule** el flujo <u>saliente</u> del campo $\bar{f}$ a través de S sabiendo que $\bar{f}$ es un campo conservativo con función potencial $U(x,y,z) = x\,y + z^2 + C$, indique gráficamente la orientación considerada para la superficie S.

Resuelto por Sylvina

AM2	Final	1/3
		25-2-25

1) a) Enunciar el teorema del Rotor (Stokes) con sus respectivas hipótesis

- C es una curva suave a trozos
- S es una superficie orientable cuya frontera es C
- $\bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F})\, d\bar{s}$$

b) Bajo las condiciones del teorema demostrar que la circ del campo $\bar{F}(x,y,z) = (2z, g(x,y,z), 2x)$ sobre cualquier curva cerrada contenida en $y = k$ es nula, siendo $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

- C es curva cerrada contenida en $S: y = k \rightarrow N = (0,1,0)$
- S sup. orientable
- $\bar{F} = (P, Q, R)$ con P y R polinomios y $g \in C^1 \Rightarrow \bar{F} \in C^1$

$$\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F})\, d\bar{s} \qquad \bar{F} = (\underbrace{2z}_{P}, \underbrace{g(x,y,z)}_{Q}, \underbrace{2x}_{R})$$

$$\operatorname{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$$
$$= (0 - g'_z, 2 - 2, g'_x - 0) \rightarrow \operatorname{rot}(\bar{F}) = (-g'_z, 0, g'_x)$$

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = \iint_{S_{xz}} \operatorname{rot}(\bar{F}) \cdot N\, dx\, dz = \iint_{S_{xy}} (-g'_z, 0, g'_x)(0,1,0)\, dx\, dz = 0$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{\ell} = 0}$$

T2 a) Definir máximo relativo de un campo escalar

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ z = f(x,y)$

$\bar{A} \in D$

entorno reducido de A

$f(\bar{A})$ es máximo relativo de f si $f(\bar{A}) \geq f(\bar{X}) \ \forall \bar{X} \in \mathcal{E}(A)$

b) Analizar si $f(x,y) = 9 - \underbrace{\sqrt{4x^2+2y^4}}_{\geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$ alcanza, en $(0,0)$ un extremo relativo

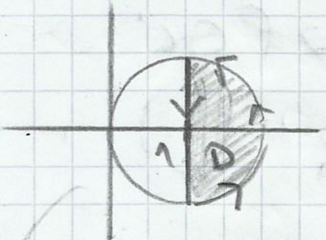
en $(0,0) \to f(x,y) = 9$

para cualquier otro punto $\sqrt{4x^2+2y^4} > 0$

$f(0,0)$ es máximo relativo y absoluto

$9 - \sqrt{4x^2+2y^4} < 0$

P1 Calcular el trabajo de $\bar{F}(x,y) = (\underbrace{H(x)+6}_{P}, \ x^2 + M(y))$ siendo $H, M \in C^1$ en $\mathbb{R}$ a lo largo de la curva FRONTERA de $D =$ $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ con $x \geq 1$



- C es curva cerrada a trozos
- D región compacta de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es C
- $\bar{F} = (P, Q)$: P y Q son sumas de funciones C^1 con polinomios $\to F \in C^1$

Se cumplen hip. T. Green

$$\oint_{C^+} \bar{F} d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx dy =$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t)+1 \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq r \leq 1$$

$$= \iint_D 2x \, dx dy \overset{C.V.}{=}$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \underbrace{r \cdot (r\cos(t)+1)}_{r^2\cos(t)+r} dr \, dt =$$

Jac

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\cos(t) + \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3}\cos(t) + \frac{1}{2} \, dt =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \, dt}_{4/3} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \boxed{\frac{4}{3} + \pi = \oint_{C^+} \bar{F} d\bar{l}}$$

AM 2	FINAL	2/3 25-2-25

P2 Sea $\varphi(x)$ la trayectoria ortogonal a la familia de curvas $Kx = e^{-2y}$ en $(0,0)$, obtener la ecuación de la recta tangente y del plano normal en el punto $(-1,0,-1)$ de la curva, $\perp$

T

$$C: \begin{cases} y + z + x\,\varphi(x) = -2 \\ z - 4y = -1 \end{cases}$$

Hallo $\varphi(x)$, derivo

$$K = \frac{e^{-2y}}{x} \qquad K = -2y' e^{-2y} \longrightarrow \frac{\cancel{e^{-2y}}}{x} = -2y' \cancel{e^{-2y}}$$

$$\boxed{\frac{-1}{2x} = y'}$$

Hallo $\perp$

$$y'_{\perp} = \frac{-1}{y'} = 2x = \frac{dy}{dx} \rightarrow 2x\,dx = dy \rightarrow \boxed{y = x^2 + c}$$

pasa x $(0,0) \rightarrow 0 = 0^2 + c \rightarrow c = 0$

$$y = \boxed{x^2 = \varphi(x)}$$

Recta tang a C en P, $P = (-1, 0, -1)$

$$C: \begin{cases} y + z + x^3 = -2 \quad (S_1) \longrightarrow G(x,y,z) = y + z + x^3 + 2 \longrightarrow \nabla G = (3x^2, 1, 1) \\ z - 4y = -1 \quad (S_2) \longrightarrow H(x,y,z) = z - 4y + 1 \longrightarrow \nabla H = (0, -4, 1) \end{cases}$$

$N_{S_1} \parallel \nabla G$ y $N_{S_2} \parallel \nabla H$ dir. recta tg $= N_{S_1} \times N_{S_2}$

dir. recta tg a C en P: $\begin{matrix} \nabla G(-1,0,-1) = (3, 1, 1) \\ \nabla H(-1,0,-1) = (0, -4, 1) \end{matrix} > (5, -3, -12)$

$$\boxed{\perp : \bar{\beta}(t) = t(5,-3,-12) + (-1,0,-1) \quad t \in \mathbb{R}}$$

T: $N(x,y,z) = N.P$

$(5,-3,-12)(x,y,z) = (5,-3,-12)(-1,0,-1)$

$5x - 3y - 12z = -5 + 12$

$$\boxed{T = 5x - 3y - 12z = 7}$$

(P3) Hallar una función $g(x)$ para que el gradiente del campo escalar F sea idénticamente igual a $(0,1)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ si

$F(x,y) = g'(x) - g(x) + x^2 + y$ sabiendo que $g'(0) = -2$, $g(0) = 0$

$$\nabla F_{(x,y)} = (g''(x) - g'(x) + 2x, 1) = (0,1)$$

busco $g(x)$ para que $g''(x) - g'(x) + 2x = 0$

llamo y a $g(x)$ $\rightarrow$ $y'' - y' = -2x$

$A, B \in \mathbb{R}$

SH) $y'' - y' = 0$

$r^2 - r = 0 = r(r-1)$ $r=0$, $r=1$ $\rightarrow$ $\boxed{y_H = A + Be^x}$

SP) $y_p = Cx \rightarrow$ me dio absurdo

$y_p = Cx^2 + Dx$ $\quad y' = 2Cx + D \rightarrow y'' = 2C$

$y'' - y' = -2x$

$2C - (2Cx + D) = -2x$

$2C \underbrace{-2C}_{=-2} x - D = -2x \rightarrow \boxed{2C - D = 0}$

$\rightarrow \boxed{C = 1} \rightarrow 2 - D = 0 \rightarrow \boxed{D = 2}$

$\boxed{y_p = x^2 + 2x}$

$y_G = A + Be^x + x^2 + 2x$

$y'_G = Be^x + 2x + 2$

$g'(0) = y'(0) = -2 = Be^0 + 0 + 2 \rightarrow \boxed{B = -4}$

$g(0) = y(0) = 0 = A + Be^0 + 0 + 0 \rightarrow A + B = 0 \rightarrow A = -B$ $\quad \boxed{A = 4}$

$y(x) = 4 - 4e^x + x^2 + 2x$

$$\boxed{g(x) = 4 - 4e^x + x^2 + 2x}$$

Resuelto por Sylvina

AM2	FINAL	3/3 25-2-25

P4 Sea la sup. frontera del cuerpo definido por $y \geq x^2+z^2$ con $y \leq 4$. Calcular el flujo del campo de $\bar{F}$ a través de S sabiendo que $\bar{F}$ es un campo conservativo con función potencial $U(x,y,z) = xy + z^2 + c$

$\bar{F}$ campo conservativo con U su función potencial $\Rightarrow \bar{F} = \nabla U$

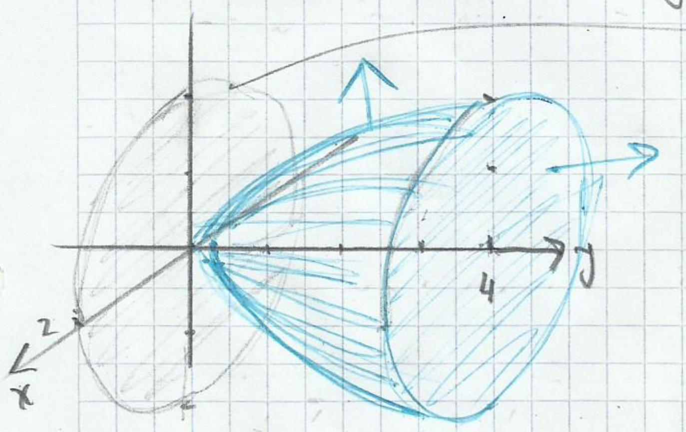
$$\bar{F}(x,y,z) = (y, x, 2z)$$

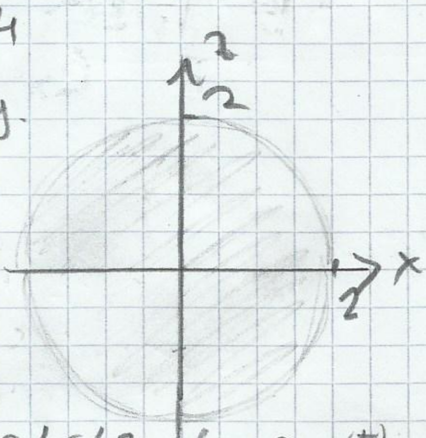
- $\bar{F} \in C^1$ (componentes polinómicas)
- S la sup. frontera de W, una región de $\mathbb{R}^3$.
  ↳ orientada al exterior

$\longrightarrow$ T. Gauss $\Rightarrow \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, d\text{vol}$

$\boxed{\operatorname{div}(\bar{F}) = 2}$

en $y=4 \Rightarrow x^2+z^2=4$ $\longrightarrow$ Proy.





$0 \leq r \leq 2$
$0 \leq t \leq 2\pi$
$\underbrace{x^2+z^2}_{r^2} \leq y \leq 4$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = y \\ z = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$$

$$\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W 2\, d\text{vol} = 2 \iiint_W d\text{vol} =$$

$$\overset{C.V}{=} 2\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 \underset{\uparrow \text{jac}}{r}\; dy\, dr\, dt = 2\underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{2\pi} \underbrace{\int_0^2 r(4-r^2)\, dr}_{4} = 16\pi$$

$$\boxed{\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = 16\pi}$$

Resuelto por Sylvina