ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 18/02/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1) a) **Enuncie** el teorema de la divergencia con las hipótesis necesarias.

b) **Determine** el valor de número real **a** tal que el flujo de $\bar{f}$ (x,y,z) = (2xy , z – y^2 , 2 **a** z) a través de la superficie frontera del cuerpo V, sea igual a 8 veces el volumen de V.

T2) a) **Defina** L_C (curva de nivel c) para un campo escalar f de dos variables. ¿En qué condiciones se puede asegurar que ∇f es perpendicular a L_C en un punto (x_0 ,y_0) que pertenece a dicha curva?

b) **Obtenga** la recta (en R^2) perpendicular a la curva de nivel **1** del campo escalar z = f(x, y) en el punto (0,0) , siendo z = f(x, y) la función definida implícitamente por la ecuación : $z^3 + y + e^{xz} - 2 = 0$

P1- **Obtenga** α_0 el plano normal a la curva C en (1,0,1), sabiendo que C queda definida por la intersección de las superficies de ecuaciones z = φ(x) – y $\wedge$ z = x + y , siendo φ(x) la curva solución de y´´= 6 x con y(0) = y´(0) = 0.

P2 - Sea $\bar{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$, **calcule**, mediante dos procedimientos distintos, el trabajo de $\bar{\boldsymbol{F}}$ desde A = (2, 4, 4) hasta B **=** (0, 0, 0) a lo largo de la curva $C: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2x \end{cases}$.

P3 – **Exprese y calcule** el área de la porción de la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$ que queda dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y fuera de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

P4 **- Exprese** la masa del cuerpo (con todos sus límites de integración) definido por: $x^2 + z^2 \leq 4$, $x + z \geq 2$, $y \leq 3$, en el 1° octante, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde dicho punto al plano yz. No es necesario resolver la integral.

(resuelto por Sylvina)

AM 2 UTN | Final | HOJA N° 1/3 FECHA 18-2-25

1) a) Enunciar el teorema de la divergencia con las hipótesis necesarias

hipótesis:
- W es una región de $\mathbb{R}^3$
- S es la superficie frontera de W, orientada al exterior
- $\bar{f} = (P, Q, R) \in C^1$

Entonces $$\oiint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_W \text{div.}(\bar{f})\, d\text{vol}$$

b) Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que el flujo del campo $\bar{F}(x,y,z) = (2xy,\ z-y^2,\ 2az)$ a través de la sup. frontera del cuerpo V sea igual a 8 veces el volumen de V

S es sup. frontera, orientada al exterior, del cuerpo V

Las componentes de $\bar{F}$ son polinomios $\rightarrow \bar{F} \in C^1$

$$\therefore \oiint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_V \text{div.}(\bar{F})\, d\text{vol} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quiero que}}}{=} 8 \iiint_V d\text{vol}$$

$\Rightarrow$ quiero que $\text{div.}(\bar{F}) = 8$

$$\text{div.}(\bar{F}) = \cancel{2y} - \cancel{2y} + 2a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

T2 a) Definir L_c (curva de nivel c) para un campo escalar f de dos variables. ¿en qué condiciones se puede asegurar que ∇f es perpendicular a L_c en un punto (x_0, y_0) que pertenece a dicha curva?

$$\boxed{L_c = \{(x,y) \in \mathrm{dom}(f) : f(x,y) = c\}}$$

$$\nabla f \perp L_c \text{ en } (x_0, y_0) \text{ si } \nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$$

b) Obtener la recta (en $\mathbb{R}^2$) perpendicular a la curva de nivel 1 del campo escalar $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ siendo $z = f(x,y)$ la función definida, implícitamente por la ecuación

$$z^3 + y + e^{xz} - 2 = 0$$

Hallo $\nabla f(0,0)$: en $(0,0) \rightarrow$ C. Nivel $1 \Rightarrow f(0,0) = \boxed{1 = z}$

$$P = (0,0,1)$$

T.F. Implícita : $G(x,y,z) = z^3 + y + e^{xz} - 2$

$G'_x = z e^{xz} \longrightarrow G'_x(0,0,1) = 1$

$G'_y = 1 \longrightarrow G'_y(0,0,1) = 1$

$G'_z = 3z^2 + e^{xz} x \longrightarrow G'_z(0,0,1) = 3$

$f'_x(0,0) = -\frac{1}{3}$

$f'_y(0,0) = -\frac{1}{3}$

$$f'_x(0,0) = -\frac{G'_x(0,0,1)}{G'_z(0,0,1)} \qquad f'_y(0,0) = -\frac{G'_y(0,0,1)}{G'_z(0,0,1)}$$

$$\nabla f(0,0) = (-1/3, -1/3)$$

$$\boxed{\perp : \beta(t) = (-1,-1)\, t}$$

NOTA

AM2	Final	HOJA N° 2/3
		FECHA 18-2-25

P1) Obtener α_0, el plano normal a la curva C en (1,0,1), sabiendo que C queda definida por la intersección de las sup. de ecuaciones: $z = \varphi(x) - y \;\wedge\; z = x + y$, siendo $\varphi(x)$ la curva solución de $y'' = 6x$ con $y(0) = y'(0) = 0$

Hallo $\varphi(x)$: $y'' = 6x \to \int y'' = y' = \int 6x$

$y' = 3x^2 + A$

$\boxed{y = x^3 + Ax + c}$

$y(0) = 0^3 + A0 + C = 0 \to \boxed{C = 0}$

$y'(0) = 3 \cdot 0^2 + A = 0 \to \boxed{A = 0}$

$\boxed{y = x^3} \longrightarrow \boxed{\varphi(x) = x^3}$

C es la intersección entre $z = x^3 - y \;\wedge\; z = x + y$

$G(x,y,z) = x^3 - y - z \to \nabla G = (3x^2, -1, -1) \longrightarrow \nabla G_{(1,0,1)} = (3, -1, -1)$

$H(x,y,z) = x + y - z \to \nabla H = (1, 1, -1)$

tg a C en $(1,0,1) = \nabla G_{(1,0,1)} \times \nabla H_{(1,0,1)} = \underbrace{(2, 2, 4)}$

es normal al plano Normal a C en (1,0,1)

el plano: $N \cdot (x,y,z) = N \cdot (1,0,1)$

$(2,2,4)(x,y,z) = (2,2,4)(1,0,1)$ punto de paso

$2x + 2y + 4z = 2 + 4 = 6$

$$\boxed{\text{Pl. Normal a C en } (1,0,1):\quad x + y + 2z = 3}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

P2 Sea $\bar{F}_{(x,y,z)} = (\overbrace{2xy}^{P}, \overbrace{x^2+z^2}^{Q}, \overbrace{2yz}^{R})$, calcular mediante dos procedimientos distintos, el trabajo de $\bar{F}$ desde $A=(2,4,4)$ hasta $B=(0,0,0)$ a lo largo de la curva $C: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2x \end{cases}$

Analizo si $\bar{F}$ es campo conservativo.

$dom(F) = \mathbb{R}^2$ ✓ $\quad \bar{F}$ tiene componentes polinómicas $\rightarrow \bar{F} \in C^1$ ✓

¿es irrotacional? $\rightarrow$ $rot(F) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$

$= (2z - 2z,\ 0 - 0,\ 2x - 2x) = \bar{0}$

<u>es irrotacional</u> $\rightarrow \bar{F}$ es campo conservativo. $\rightarrow$ independencia del camino.

$\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = \int_T \bar{F}\,d\bar{l}$ $\rightarrow$ si C y T empiezan en $A=(2,4,4)$ y terminan en $B=(0,0,0)$

$T: \bar{\beta}(t) = t(B-A) + A = t(-2,-4,-4) + (2,4,4)$

$\bar{\beta}(t) = (\underbrace{2-2t}_{x}, \underbrace{4-4t}_{y}, \underbrace{4-4t}_{z})$

$\bar{\beta}'(t) = (-2,-4,-4) \qquad t \in [0,1]$

$\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = \int_T \bar{F}\,d\bar{l} = \int_0^1 \bar{F}(\bar{\beta}(t))\,\bar{\beta}'(t)\,dt =$

$= \int_0^1 \Big(\underbrace{2\overbrace{(2-2t)}^{x}\overbrace{(4-4t)}^{y}}_{8-16t+8t^2},\ \underbrace{\overbrace{(2-2t)^2}^{x^2} + \overbrace{(4-4t)^2}^{z^2}}_{4-8t+4t^2+16-32t+16t^2},\ \overbrace{2(4-4t)(4-4t)}^{16-32t+16t^2}\Big)(-2,-4,-4)\,dt =$

$= \int_0^1 (16 - 32t + 16t^2,\ 20t^2 - 40t + 20,\ 32 - 64t + 32t^2)(-2,-4,-4)\,dt =$

$= \int_0^1 -32 + 64t - 32t^2 - 80t^2 + 160t - 80 - 128 + 256t - 128t^2\,dt =$

$= \int_0^1 -240t^2 + 480t - 240\,dt = \boxed{-80 = \int_C \bar{F}\,d\bar{l}}$

$C: \bar{\gamma}(t) = (-t, t^2, -2t) \rightarrow \bar{\gamma}'(t) = (-1, 2t, -2) \qquad A = \bar{\gamma}(-2),\ B = \bar{\gamma}(0)$

$\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = \int_{-2}^{0} (2(-t)t^2,\ (-t)^2 + (-2t)^2,\ 2t^2(-2t))(-1, 2t, -2)\,dt =$

$= \int_{-2}^{0} 2t^3 + 10t^3 + 8t^3\,dt = \int_{-2}^{0} 20t^3\,dt = \boxed{-80 = \int_C \bar{F}\,d\bar{l}}$

NOTA

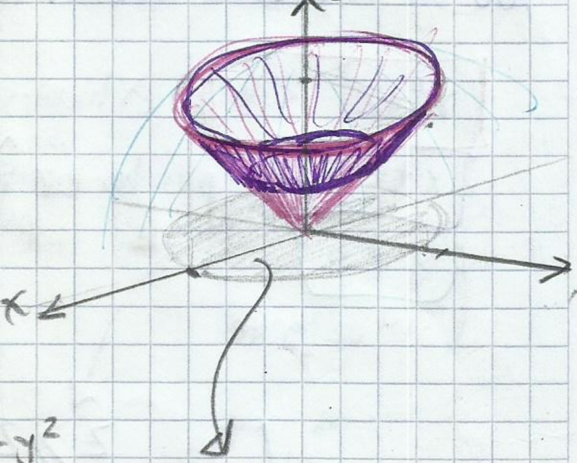
(resuelto por Sylvina)

AM 2 | Final | HOJA N° 3/3 | FECHA 18-2-25

(P3) Expresar y calcular el área de la porción de la sup. de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$ que queda dentro de $x^2+y^2+z^2=8$ y fuera de $x^2+y^2+z^2=2$

$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \to z = \sqrt{x^2+y^2} \to \text{cono} \\ z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 8 \to \text{esfera} \\ x^2+y^2+z^2 \geq 2 \to \text{esfera} \end{cases}$$

queda "dentro" de



Analizo la proyección

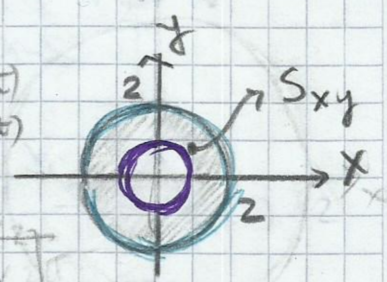
$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z \leq \sqrt{8-x^2-y^2} \end{cases} \to x^2+y^2 \leq 8-x^2-y^2 \quad \boxed{x^2+y^2 \leq 4}$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z \geq \sqrt{2-x^2-y^2} \end{cases} \to x^2+y^2 \geq 2-x^2-y^2 \quad \boxed{x^2+y^2 \geq 1}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$$

$z = r$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{matrix}}$$



$G(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$\nabla G = (2x, 2y, -2z) \to N = \frac{\nabla G}{|G'z|} = \left(\frac{2x}{2z}, \frac{2y}{2z}, \frac{-2z}{2z}\right)$

$N = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -1\right)$

$\|N\| = \sqrt{\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}$ $\quad z = \sqrt{x^2+y^2}$

$A_S = \iint_S ds = \iint_{S_{xy}} \|N\|\, dx\,dy =$

$= \iint_{S_{xy}} \sqrt{\frac{x^2+y^2+ \overbrace{x^2+y^2}^{z^2}}{\underbrace{x^2+y^2}_{z^2}}}\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} \sqrt{\frac{2\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}}\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} \sqrt{2}\, dx\,dy =$

$= \sqrt{2} \underbrace{\boxed{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}}_{\text{Area } S_{xy}} = \sqrt{2} \cdot \pi (r_1 - r_2)^2 = \sqrt{2}\,\pi\,(2^2 - 1^2) = 3\sqrt{2}\pi$.

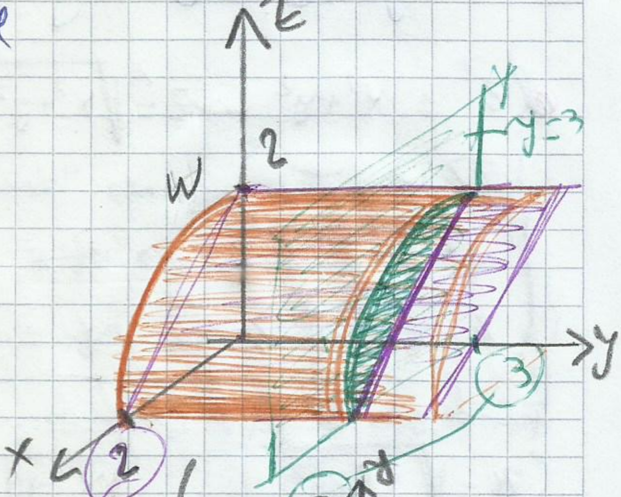
$$\boxed{A_S = 3\sqrt{2}\,\pi}$$

NOTA

P4) Expresar la masa del cuerpo (con todos sus límites de integración) definido por $x^2+z^2 \le 4$, $x+z \ge 2$, $y \le 3$, 1° octante si su densidad en cada punto, es proporcional a la distancia de dicho punto al plano yz.

No es necesario resolver la integral

$$\begin{cases} \boxed{x^2+z^2 \le 4} & \text{cilindro con eje en } y \\ \boxed{x+z \ge 2} & \text{puntos arriba del plano } x+z=2 \\ \boxed{y \le 3} & \\ 1° \text{ octante} & \end{cases}$$

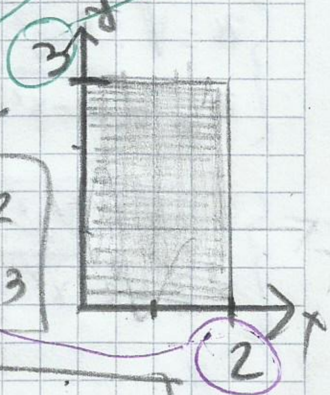


$z \le \sqrt{4-x^2}$ $\qquad$ $z \ge 2-x$

$$\boxed{2-x \le z \le \sqrt{4-x^2}}$$

proyección en xy

$$\boxed{\begin{matrix} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{matrix}}$$



$$\delta_{(x,y,z)} = \overset{\text{proporcional}}{k}\,|x| \xrightarrow{x \ge 0} \boxed{\delta_{(x,y,z)} = kx}$$

$$\boxed{\text{Masa} = \iiint_W \delta_{(x,y,z)}\, d\text{vol} = \int_0^2 \int_0^3 \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} kx \; dz\, dy\, dx}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)