ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 11/02/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1) a) Defina superficie parametrizada y punto regular de una superficie.

b) Sea R_o la recta normal en $\bar{A} = (2,1,3)$ a la superficie S de ecuación $\bar{X} = \left(2u^2, v-u, v+u\right)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$; **analice** si R_o corta al plano x + y = z + 5; en caso afirmativo halle el punto de corte .

T2) a) Grafique el conjunto de integración de la siguiente integral doble:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\,sen\,\theta} \rho^2 sen\theta d\rho \right) d\theta$$

b) **Exprese** dicha integral en coordenadas cartesianas

P1- Dada $T(x,y) = x^2\, y + y^2 + x^2$; **analice** y **clasifique** extremos locales.

P2 **-** Sea $\vec{f}\,(x;y;z)$ solenoidal (Divergencia nula) / $\vec{f}\,(x;y;0) = (x\,, y\, -2\,,\, y^2)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ de ecuación $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, indique el versor normal considerado.

P3 **- Obtenga** la curva ortogonal a la familia dada por x y = K, que pase por (5,3) y luego, **elabore** una parametrización para dicha curva, para x e y positivos .

P4- **Exprese** la masa del cuerpo definido por: $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $z \leq 4$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

(resuelto por Sylvina)

AM2 UTN | Final | HOJA N° 1/3 | FECHA 11/2/25

T1 a) Definir superficie parametrizada y punto regular de una superficie

Sup. parametrizada: es la imagen de una función vectorial que expresa puntos de $\mathbb{R}^3$ con parámetros de $\mathbb{R}^2$

Punto regular de una superficie:

Sean $\bar{\sigma}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{\sigma}$ continua en D dada por

$$\bar{\sigma}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

y $P \in S$ con S parametrizada por $\bar{\sigma}(u,v)$, entonces $P = \bar{\sigma}(u_0,v_0)$

P es punto regular si $\bar{\sigma}'_u(u_0,v_0) \times \bar{\sigma}'_v(u_0,v_0) \neq \bar{0}$

b) Sea R_0 la recta normal en $\bar{A} = (2,1,3)$ a la sup. S de ecuación $\bar{X} = (2u^2, v-u, v+u)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Analizar si R_0 corta al plano $x+y = z+5$. En caso afirmativo, hallar el punto de corte.

Hallo N_0 en $\bar{A}$

$$\bar{A} = \bar{X}(u_0,v_0) \to (2,1,3) = (\overbrace{2u_0^2}^{2}, \overbrace{v_0-u_0}^{1}, \overbrace{v_0+u_0}^{3})$$

$2u_0^2 = 2 \Rightarrow |u_0| = 1$

$\begin{cases} v_0 - u_0 = 1 \\ v_0 + u_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{array}$

$\bar{X}'_u = (4u, -1, 1) \to \bar{X}'_u(1,2) = (4,-1,1)$

$\bar{X}'_v = (0,1,1) \to \bar{X}'_v(1,2) = (0,1,1)$

$\Big\} N = (-2,-4,4)$ → uso: $N = (1,2,-2)$

$$\boxed{R_0: \bar{P}(t) = t(1,2,-2) + (2,1,3) = (\underbrace{t+2}_{x}, \underbrace{2t+1}_{y}, \underbrace{3-2t}_{z})}$$

Hallo $R_0 \cap x+y = z+5$

$$x + y = z + 5$$

$$(t+2) + (2t+1) = 3 - 2t + 5$$

$$3t + 3 = -2t + 8 \to 5t = 5 \to \boxed{t = 1}$$

$\exists t \Rightarrow \exists$ corte

$$\boxed{P = \bar{P}(1) = (3,3,1)}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

T2 a) Graficar el conjunto integración de la sig. integral doble:

$$\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\,sen(\theta)} \rho^2\,sen\,\theta\,d\rho\right)d\theta$$

$d\theta \uparrow \qquad \uparrow d\rho$

$0 \le \theta \le \pi/4$

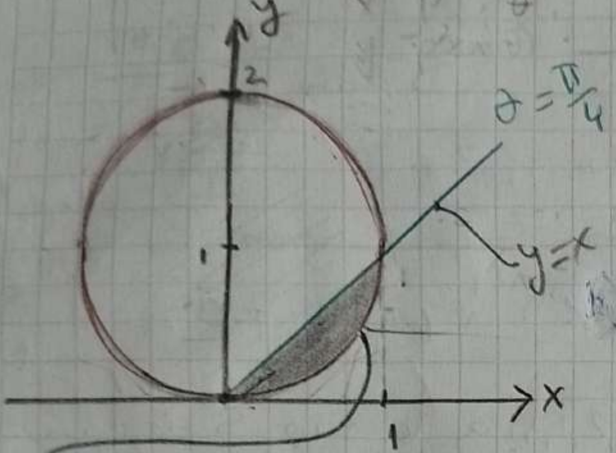
$\underbrace{0 \le \rho \le 2\,sen(\theta)}$

$\rho^2 \le 2\rho\,sen(\theta)$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,sen\,\theta \end{cases}$

$\underbrace{x^2+y^2 \le 2y}_{\text{circulo corrido en y}}$

$$\boxed{x^2+(y-1)^2 \le 1}$$



b) Expresar dicha integral en coord. cartesianas

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\,sen\,\theta} \rho\,\underbrace{\rho\,sen\,\theta}_{y}\,d\rho\,d\theta \overset{C.V.}{=} \int_0^1\int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{x} \cancel{\rho}\cdot y\cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\rho}}}_{\text{jacobiano}}\,dy\,dx$$

$x^2+(y-1)^2=1$

$(y-1)^2 = 1-x^2$

$|y-1| = \sqrt{1-x^2}$

$y = 1+\sqrt{1-x^2}$

$y = 1-\sqrt{1-x^2}$

$$\boxed{I = \int_0^1\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} y\,dy\,dx}$$

NOTA

AM 2 UTN	Final	HOJA N° 2/3 FECHA 11-2-25

(P1) Dada $T(x,y) = x^2y + y^2 + x^2$. Analizar y clasificar extremos locales

T es diferenciable $\rightarrow$ busco $(x,y) / \nabla T(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} T'_x = 2xy + 2x = 0 = 2x(y+1) \rightarrow \boxed{x=0} \vee \boxed{y=-1} \\ T'_y = x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

si $x=0 \longrightarrow 2y=0 \rightarrow y=0 \longrightarrow$

si $x \neq 0 \rightarrow y=-1 \rightarrow \underbrace{x^2+2(-1)=0}_{x^2=2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} PC_1 = (0,0) \\ PC_2 = (\sqrt{2}, -1) \\ PC_3 = (-\sqrt{2}, -1) \end{array}}$$

Criterio del hessiano

$$\left.\begin{array}{l} T''_{xx} = 2y+2 \\ T''_{xy} = 2x \\ T''_{yy} = 2 \end{array}\right\} H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

PC_1: $|H(0,0)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{4 > 0 \text{ y } T''_{xx} > 0}$ mínimo local

$\boxed{T(0,0) \text{ es mínimo local}}$

PC_2 $|H(\sqrt{2},-1)| = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \rightarrow$ punto de ensilladura

(no hay extremo local)

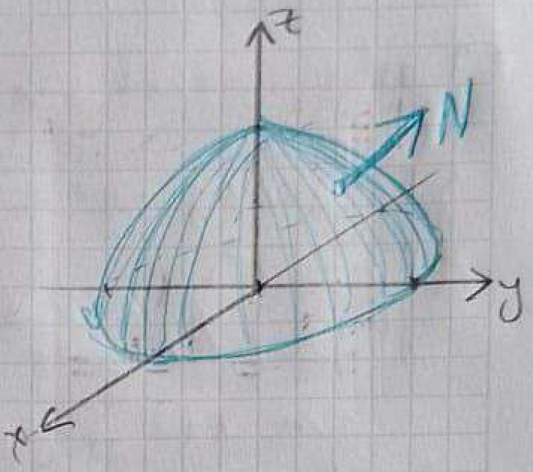
PC_3 $|H(-\sqrt{2},-1)| = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8 < \rightarrow$ punto de ensilladura

(no hay extremo)

NOTA

(resuelto por Sylvina)

(P2) Sea $\bar{F}(x,y,z)$ solenoidal (divergencia nula) / $\bar{F}(x,y,0) = (x, y-2, y^2)$ calcular el flujo de $\bar{F}$ a través de ~~Σ~~ de ecuación $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$
Indicar el versor normal considerado



$\Sigma: \quad z = \sqrt{4-x^2-y^2} \rightarrow z \geq 0$

$z^2 = 4 - x^2 - y^2$

$\boxed{x^2+y^2+z^2 = 4 \quad \text{con } z \geq 0}$

$\underbrace{\text{superficie abierta.}}_{\text{cierro con}}$ $\underbrace{\text{disco } r=2 \text{ en } z=0}_{T}$

$\Sigma \cup T = S \longrightarrow$ S es sup frontera de W (1/2 esfera) región de $\mathbb{R}^3$

$\bar{F} \in C^1$

Se cumplen las hip. T Gauss $\rightarrow \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div}\bar{F}\, dvol$

$\iint_\Sigma \bar{F}\, d\bar{\sigma} + \underbrace{\iint_T \bar{F}\, d\bar{\sigma}}_{(2)} = \underbrace{\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma}}_{(1)}$ (*)

solenoidal

(1) $\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W 0\, dvol \longrightarrow \boxed{\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = 0}$

la normal debe apuntar hacia abajo

(2) $\iint_T \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iint_T \bar{F}\, \check{n}\, d\sigma = \iint_{T_{xy}} \bar{F}\, n\, dx\,dy =$

en $z=0 \rightarrow \bar{F}(x,y,0)$

$= \iint_{T_{xy}} (x, y-2, y^2)\,(0,0,-1)\, dx\,dy =$

$T: z = 0$

$\boxed{N_T = (0,0,-1)}$

CV 2 Jac

$= \iint_{T_{xy}} -y^2\, dx\,dy = -\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\, r^2 \operatorname{sen}^2(t)\, dr\, dt =$

$= -\underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)\, dt}_{\pi} \int_0^2 r^3\, dr = \boxed{-\pi\, 4 = \iint_T \bar{F}\, d\bar{\sigma}}$

(*) $\iint_\Sigma \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} - \iint_T \bar{F}\, d\bar{\sigma} = 0 - (-4\pi) = 4\pi$

$$\boxed{\iint_\Sigma \bar{F}\, d\bar{\sigma} = 4\pi}$$

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final	HOJA N° 3/3 FECHA 11-2-25

(P3) Obtener la curva ortogonal a la familia dada por $xy=k$ que pasa por $(5,3)$ y luego elaborar una parametrización para dicha curva, para x e y positivos

$$xy = k \to y = \frac{k}{x} \longrightarrow y' = -\frac{k}{x^2} = \frac{-xy}{x^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{-y}{x}}$$

$$y'_\perp = -\frac{1}{y'} = -\left(\frac{-x}{y}\right) = \frac{x}{y} \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \to y\,dy = x\,dx$$

integro m a m $\boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c}$

pasa por $(5,3) \to \begin{matrix} x=5 \\ y=3 \end{matrix} \longrightarrow \frac{3^2}{2} = \frac{5^2}{2} + c \to c = -8$

$$C: \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = -8$$

$$\boxed{C: x^2 - y^2 = 16}$$

x e y positivos $\quad x^2 = 16 + y^2$

$$\to x = \sqrt{16+y^2}$$

$$\boxed{C: \bar{\beta}(t) = \left(\sqrt{16+t^2}, t\right)} \qquad t \geq 0$$

otra param?

$$x^2 - 16 = y^2$$

$$\sqrt{x^2-16} = y \to \boxed{C: \bar{\gamma}(t) = t, \sqrt{t^2-16}} \qquad t \geq 8$$

(resuelto por Sylvina)

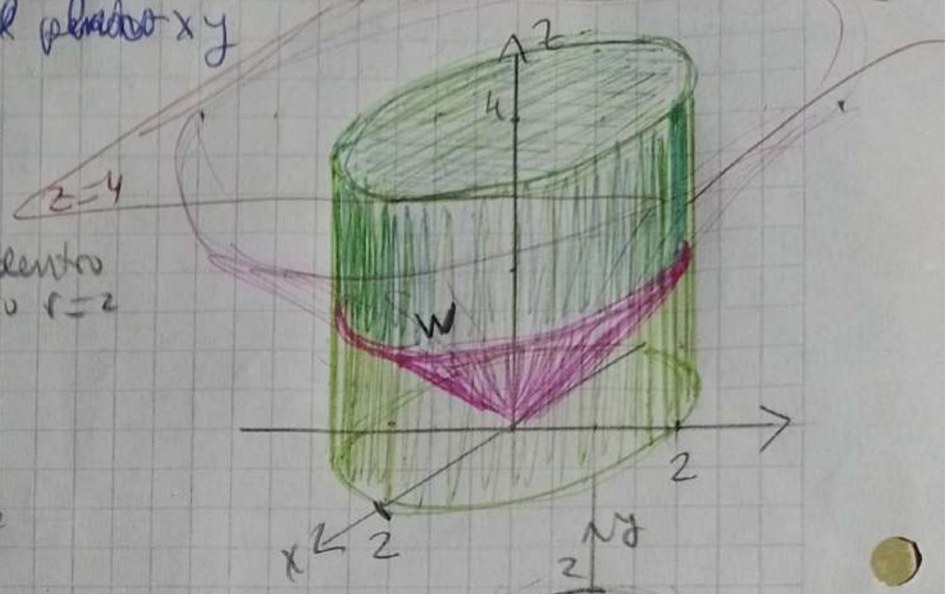
(P4) Expresar la masa del cuerpo definido por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \leq 4$, $z \leq 4$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia al plano xy

$z \geq 0$

$z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ → semicono positivo

$x^2+y^2 \leq 4$ → puntos adentro de cilindro $r=2$

$z \leq 4$



→ como en $z=4$: $16 = x^2+y^2$

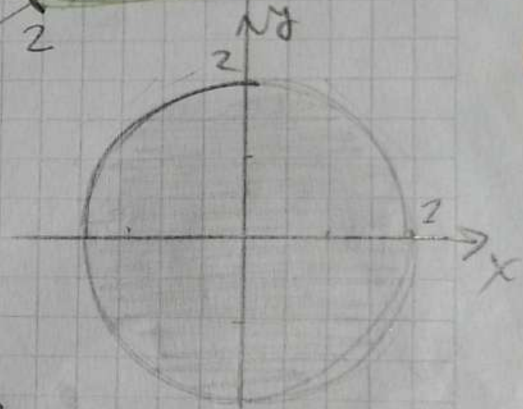
$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2}$

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$r \leq z \leq 4$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$



$\delta(xyz) = k|z|$ como $z \geq 0 \rightarrow \delta(xyz) = kz$

$$\text{Masa} = \iiint_W \delta(xyz)\, dvol = k\iiint_W z\, dvol \overset{C.V}{=} k\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^4 \overset{\text{Jacob}}{r}\, z\, dz\, dr\, dt =$$

$$\boxed{\text{Masa} = k\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^4 r\,z\, dz\, dr\, dt}$$

(resuelto por Sylvina)